ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

См. лекции 1-5

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ

См. лекции 6-11

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графы имеют многочисленные применения в самых различных областях человеческой деятельности. И это естественно, ибо если граф относительно небольшой (размерность задачи маленькая), то мы имеем возможность нарисовать его, точнее изобразить его схему или диаграмму. В этом случае во многих ситуациях задача становится практически понятной. С другой стороны, для работы с большими графами можно с успехом применять ЭВМ. С этой целью разработаны и удобные способы представления графов в ЭВМ, и разнообразные алгоритмы, позволяющие решать широкий круг задач.

11 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Всюду в этом разделе и почти всюду во всей третьей части мы придерживаемся терминологии из книг [10] и [13].

11.1 Графы. Орграфы. Мультиграфы. Примеры и простые свойства. Метрические характеристики графов

11.1.1 *Граф* – это пара $G = (V, E)$, состоящая из двух множеств: V – множество объектов произвольной природы, называемых *вершинами*, а E – семейство пар вершин $e_i = (v_{i1}, v_{i2})$, где $v_{ij} \in V$, называемых *рёбрами*. Соответственно, V называется *множеством вершин*, а E – *множеством рёбер*. Когда делают рисунок графа (или *диаграмму*), его вершины чаще всего представляют точками на плоскости, а рёбра очень часто изображают дугами или стрелками между соответствующими вершинами.

Если порядок вершин, задающих ребро e_i, имеет значение, то граф называется *ориентированным*, сокращенно – *орграф*. В этом случае, рисуя граф, на его *дугах* (рёбрах) указывают стрелкой направление, и говорят, что одна из вершин (или *узлов*) является *началом* ребра, а вторая – его *концом*. Например, на рисунке 11.1 вершина A_2 – начало ребра u_{10}, а вершина A_5 – его конец. В противном случае граф называется *неориентированным*. В дальнейшем будем считать, что термин «граф», применяемый без уточнений « ориентированный » или «неориентированный», обозначает именно *неориентированный граф*. Когда начало и

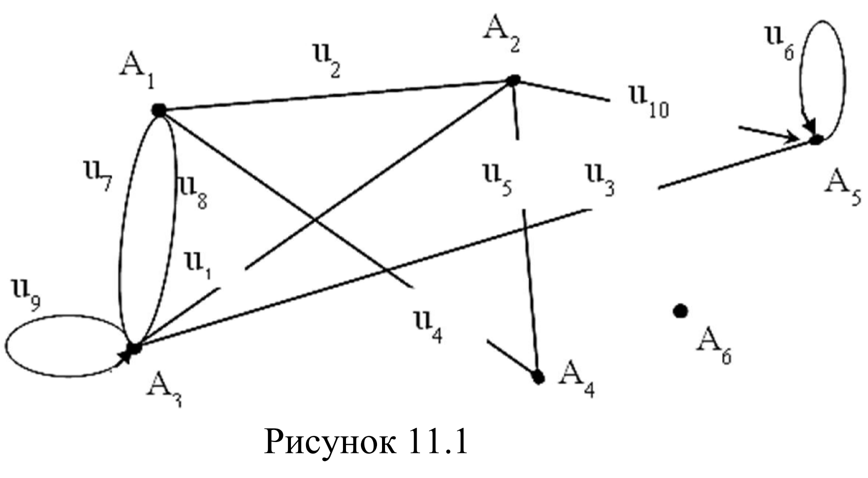


Рисунок 11.1

конец какого-то ребра совпадают, такое ребро называют *петлёй* (на рисунке 11.1 это u_6 и u_9). Петли на диаграмме принято изображать со стрелкой даже в том случае, когда граф неориентированный.

Из некоторых вершин могут не выходить никаких рёбер, например, из A_6 на рисунке 11.1, такие вершины называются *изолированными*.

Обыкновенный или *простой* граф не содержит петель и *кратных* рёбер и, разумеется, он неориентированный. Обыкновенные графы нередко называют просто графами; для того, чтобы отличить их от графов, содержащих кратные или *параллельные* ребра (таковы, например, ребра u_6 и u_9 на рисунке 11.1), подобные графы иногда называют *мульти-графами*. Таким образом, в мульти-графе между двумя вершинами может быть несколько рёбер.

Всюду далее рассматриваются только *конечные* графы, т.е. такие у которых конечное множество вершин и рёбер.

Замечание 11.1 В некоторых книгах в определении мульти-графа петли и ориентированные ребра запрещены. А монстры, подобные тому, что изображён на рисунке 11.1, тогда называют *псевдографами*.

11.1.2 *Полный* граф $G = (V,E)$ – это такой, в котором любая пара вершин *инцидентна* единственному ребру (связана единственным ребром). Другими словами, это неориентированный граф, в котором любая пара вершин *смежна*, т.е. принадлежит какому-то ребру (соединена некоторым ребром). Обозначается как K_p, где $p = |V|$ – количество вершин в графе.

Упражнение 11.1 *Докажите, что в полном графе с p вершинами число рёбер равно* $|E| = p(p-1)/2$.

Когда два ребра имеют общую вершину, то они также называются *смежными*. Например, на рисунке 11.1 рёбра u_1, u_7, u_8 и u_3 смежные. ребро u_1 смежно также с u_2, и u_5, но оно не смежно ни с u_4, ни с u_6. Таким образом, смежными могут быть лишь однородные объекты – рёбра или вершины между собой, но ребро и вершина могут быть только инцидентны.

Пустой – это такой граф $G = (V,E)$, в котором нет рёбер: $E = \varnothing$, обозначение – N_m, где m – количество вершин. Не следует путать его с пустым множеством из подраздела 1.1 – в пустом множестве нет совсем никаких элементов, а в пустом графе нет только рёбер, а вершин при этом может быть очень много.

Связным называется граф, у которого любая пара вершин взаимно достижима, т.е. у которого из каждой вершины существует маршрут (или путь) в любую другую. Граф связен тогда и только тогда, когда множество его вершин нельзя разбить на два непустых подмножества так, чтобы обе граничные (концевые) точки каждого ребра находились в одном и том же множестве.

Усилением понятия связных графов являются *k-связные графы* (точнее, *k-вершинно-связные* графы) – это графы, которые при удалении любых $k - 1$ вершин остаются связными. А *k-реберно-связный* граф – это граф, который при удалении любых $k - 1$ ребер остается связным.

Пример 11.1 Граф G_1, изображённый на рисунке 11.2, 4-рёберно связный, так как удалив три рёбра AD, AE и AF мы получаем не связный граф, в то же время удаление из него любых двух рёбер такого эффекта не даёт.

Граф может быть несвязным, но при этом состоять из отдельных связных частей, которые называются *компонентами связности*. Например, два графа, изображённые на рисунке 11.5, можно рассматривать как один граф, имеющий две компоненты связности – G_4 и G_5.

Теорема 11.1 *Свойства связных графов и компонент связности.*

а) Связный граф остается связным после удаления ребра тогда и только тогда, когда это ребро содержится в цикле.

б) Связный граф, имеющий N вершин, содержит не менее $N - 1$ ребро.

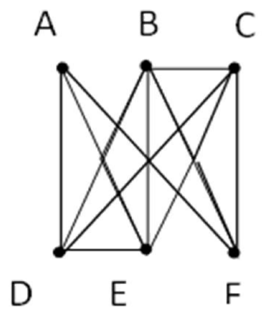


Рисунок 11.2 – Граф G_1

в) В связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют, по крайней мере, одну общую вершину.

г) В простом графе с N вершинами и K компонентами связности число рёбер не превышает $(N - K)(N - K+1)/2$.

11.1.3 *Расстоянием* между двумя вершинами связного графа называется длина кратчайшей цепи (пути, маршрута), связывающей эти вершины, т.е. количество рёбер в кратчайшем пути.

Пример 11.2 Для графа G_1, изображённого на рисунке 11.2 расстояние от вершины A до вершин D, E и F равно 1, а до вершин B и C равно двум: $r(A,D) = r(A,E) = r(A,F) = 1$, $r(A,B) = r(A,C) = 2$.

Эксцентриситетом вершины называется наибольшее расстояние от данной вершины до других вершин графа. Для графа G_1 эксцентриситет вершины A равен двум: $e(A) = 2$, для других вершин он тоже несложно находится: $e(B) = e(C) = e(D) = e(E) = e(F) = 2$.

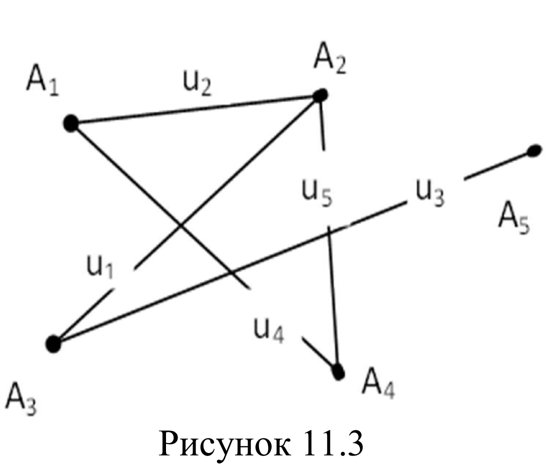


Рисунок 11.3 – Граф G_2

Радиус графа определяется как наименьший из эксцентриситетов вершин, а *диаметр* – как максимальный эксцентриситет.

Пример 11.3 У графа G_1 радиус совпадает с диаметром: $R(G_1) = D(G_1) = 2$. А для графа G_2 с рисунка 11.3 имеем $R(G_2) = 2$, $D(G_2) = 3$.

11.1.4 *Степенью* или *валентностью* вершины называется количество рёбер графа, которым инцидентна (принадлежит) эта вершина, т.е. число выходящих из неё рёбер. Список степеней вершин графа, упорядоченный по возрастанию или убыванию называется *в е к т о р о м   с т е п е н е й*.

Обычно термин «валентность» применяют к мульти-графам. При подсчёте степени вершины петля считается за два ребра.

П р и м е р ы 11.4 Вектор степеней графа G_1 равен (3,3,4,4,4,4), у графа G_2, который изображён на рисунке 11.3, он равен (1,2,2,2,3). В то же время, набор степеней вершин графа G_1 в алфавитном порядке – это 3,4,4,4,4,3. Теперь становится понятным, зачем нужно упорядочивать числа в векторе степеней – чтобы он не зависел от нумерации вершин. Валентность вершины A_3 у мульти-графа (или псевдографа?) с рисунка 11.1 равна 6, а у A_1 она – 4.

Несложно доказываются следующие свойства степеней.

Т е о р е м а 11.2 *а) Сумма степеней всех вершин графа или мульти-графа равна удвоенному количеству рёбер.*

б) В обыкновенном графе всегда есть хотя бы две вершины с одинаковыми степенями.

в) Если в простом графе с n вершинами есть ровно две вершины с одинаковыми степенями, то их степени не 0, и не $n-1$.

У п р а ж н е н и е 11.2 *Докажите теоремы 11.1 и 11.2.*

У п р а ж н е н и е 11.3 *Можно ли нарисовать простые графы или мульти-графы со следующими векторами степеней: а) (1,1,1,2,3,5); 2) (1,2, 3,4,5,6,7); 3) (0,1,2,3,4,5,6,7); 4) (0,0,1,2,3,4,5); 5) (1,2,3,4,5,6,7,8,8)?*

11.2 Изоморфизм. Дополнительные и помеченные графы

11.2.1 Граф G_2 можно изобразить иначе, чем на рисунке 11.3. Например, так как это сделано на рисунке 11.4. Чтобы убедиться в том, что это действительно одинаковые графы, сопоставим вершине A_1 графа G_2 вершину A графа с рисунка 11.4, вершине A_2 – вершину D, вершине A_3 – вершину E, вершине A_4 – вершину B, вершине A_5 – вершину C.

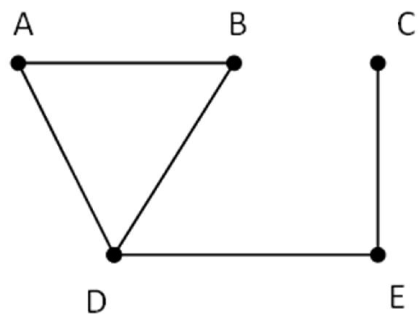
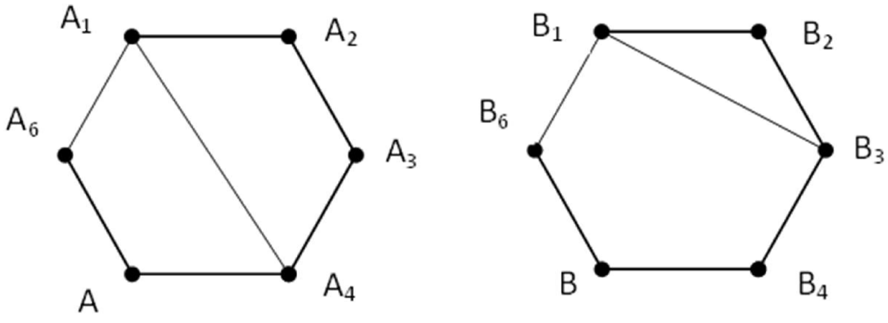


Рисунок 11.4

В результате у нас получилось взаимно однозначное соответствие между вершинами, при котором две вершины графа на рисунке 11.3 соединены ребром (смежные) тогда и только тогда, когда смежными являются две соответствующие вершины графа, изображённого на рисунке 11.4. В подобной ситуации говорят также, что графы, изображённые на этих рисунках *и з о м о р ф н ы*. Таким образом, изоморфные графы это такие, которые можно «наложить» друг на друга так, чтобы каждой вершине одного соответствовала ровно одна другого, и при этом сохранялась смежность вершин.



граф G_4 граф G_5

Рисунок 11.5

Понятно, что у изоморфных графов почти все их характеристики и свойства одинаковые, в частности, векторы степеней, наличие и число циклов определённой длины и т.д. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. равенство каких-то характеристик графов не гарантирует их изоморфизма.

Пример 11.5 Графы G_4 и G_5 с рисунка 11.5 неизоморфны, так как у графа G_4 нет цикла длины 3, а в графе G_5 он имеется – это B_1 - B_2 - B_3 - B_1. Но у этих графов один и тот же вектор *степеней*: (2,2,2,2,3,3).

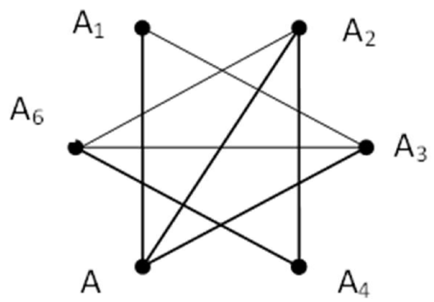


Рисунок 11.6 – Граф дополнительный к G_4

11.2.2 В некоторых случаях бывает удобнее исследовать не сам граф G, а *дополнительный к нему граф* (обозначение $\sim G$ или $\overline{G}$). Этот граф содержит то же множество вершин, что и G, и две вершины в $\sim G$ смежны тогда и только тогда, когда эти вершины не смежны в G. Это наглядно пояснено на рисунке 11.6 на примере графа G_4.

Однородный (или *регулярный*, или *k-регулярный*) граф – это граф, все вершины которого имеют одну и ту же степень, равную k.

(n,m)-*граф* – это граф, имеющий в точности n вершин и m ребер.

Упражнение 11.4 *Докажите, что отношение изоморфизма есть эквивалентность на множестве всех графов в точном соответствии с определением п. 2.2.4, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Упражнение 11.5 *Докажите, что графы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны дополнительные к ним. Будет ли дополнительный граф к регулярному графу тоже регулярным?*

Упражнение 11.6 *Сколько рёбер и вершин имеет граф дополнительный к (n,m)-графу? А как рассчитать вектор степеней дополнительного графа, зная вектор степеней самого графа?*

11.2.3 До сих пор мы рассматривали графы, у которых нумерация или маркировка вершин не важны. Однако в некоторых ситуациях название (маркировка) вершин весьма существенна, к примеру, при проектировании дорог между населёнными пунктами. В этих случаях работают с *поме-*

ч е н н ы м и графами, а именно, с графами, у которых задана нумерация или маркировка вершин и/или ребер. Например, графы G_2 и G_3, изображённые на рисунках 11.3 и 11.4, соответственно, изоморфны как обыкновенные графы, но как помеченные они разные, если даже считать вершины *A,B,C,D,E* упорядоченными в алфавитном порядке.

У п р а ж н е н и е 11.7* *Сколько имеется различных (неизоморфных) помеченных обыкновенных графов с* n *вершинами, маркировка которых зафиксирована?*

У п р а ж н е н и е 11.8* *Сколько имеется различных (неизоморфных) непомеченных простых графов с* n *вершинами? Указание. Нарисуйте и посчитайте различные графы при небольших* $n=2,3,4,5$.

11.3 Подграфы. Взвешенный граф. Способы задания графов в ЭВМ (матричные и другие)

В виде рисунка графы не всегда удобно задавать, например, при оперировании с ними на ЭВМ. Для этого более подходят матричные способы задания графов.

11.3.1 Один из таких способов – это *м а т р и ц а с м е ж н о с т и*. Пусть в графе G имеется n вершин, и эти вершины занумерованы числами от 1 до n. Тогда матрица смежности $M(G) = \left\| \mu_{i,j} \right\|_{n\times n}$ графа G имеет n строк и столбцов. При этом на месте (i,j), т.е. в i-й строке и j-м столбце, ставим 1, если в графе G имеется ребро, из i-й вершины в j-ю; в противном случае, когда вершины i-я и j-я не смежны, там ставим 0:

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если имеется ребро из i-й вершины в j-ю} \\ 0, & \text{если в G нет ребра из i-й вершины в j-ю} \end{cases}.$$

П р и м е р 11.6 Для графов, изображённых на рисунках 11.3 и 11.4, получаются следующие матрицы:

$$M(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad M(G_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

здесь мы подразумевали, что в графе G_3 вершины упорядочены в алфавитном порядке, т.е. A – первая, B – вторая, C – третья и т.д. Обратите внимание, что хотя графы G_2 и G_3 – изоморфны (символически $G_2 \cong G_3$), их матрицы смежности – разные. Однако давайте вспомним, что для доказательства изоморфизма этих графов первой вершине графа G_2 мы сопоставили первую вершину графа G_3, второй – четвёртую, третьей – пятую, четвёртой – вторую, а пятой – третью. Поменяем в матрице $M(G_2)$ сначала строки в том же порядке, т.е. первую оставим на месте, вторую запишем вместо четвёртой, третью – вместо пятой, четвёртую – вместо второй, а пятую – на месте третьей. Затем те же преобразования проделаем со столбцами. В результате у нас получится матрица $M(G_3)$:

$$M(G_2)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}=M(G_3).$$

З а м е ч а н и е 11.2 При работе с небольшими графами, особенно если они заданы рисунками, можно просто указать соответствие вершин для того, чтобы установить изоморфизм графов. Подобные преобразования с матрицами смежности, понятно лучше выполнять на ЭВМ.

11.3.2 Матрицей смежности можно задавать как обыкновенные графы, в этом случае получается симметричная матрица с нулями по главной диагонали, так и мульти-графы. В последнем случае на месте (i,j) ставим количество рёбер с началом в i-й вершине и концом в j-й вершине. Матрица при этом может получиться несимметричная, если граф ориентированный. Обратная задача – создание чертежа графа по его матрице смежности, тоже проста. На плоскости отмечают n точек (по количеству столбцов или строк), точки при этом лучше расположить по окружности. Если данная матрица несимметричная, то соответствующие точки соединяются стрелками и получается ориентированный граф, в противном случае – граф неориентированный, и точки можно соединять просто линиями. Если Вы видите, что ваш граф можно изобразить плоским, то сделайте это, этого рисунка обычно бывает достаточно для обоснования *планарности* графа (см. подраздел 12.2) и некоторых других свойств.

11.3.3 Во многих приложениях графов, важно знать не только какие вершины смежные, но и какой имеется *в е с* на том или ином ребре или вершине. Эти веса в зависимости от ситуации могут означать разное: расстояние, затраты, прибыль, время, необходимое для выполнения работы, вероятность выхода из строя и т.д.

При этом, как правило, оставляют веса только на рёбрах, чтобы было удобнее задать граф в виде матрице и иметь возможность применять разработанные уже алгоритмы. С целью избавиться от весов на вершинах, если нужно, вводят дополнительные вершины и рёбра. Рисунок 11.7 иллюстрирует эту операцию. Предположим вес ребра AB равен k, ребра BC – m, а вес вершины B – l. Чтобы избавиться от веса на этой вершине, превращаем её в ребро, а именно, вводим две новые вершины B_1 и B_2. Соединяем ребром веса k вершину A с B_1, ребром веса m вершины B_2 и C, а вес l ставим на новое ребро B_1B_2.

Графы с весами на рёбрах (*взвешенные* графы) удобно задавать в виде *матрицы весов*. Она отличается от матрицы смежности тем, что у неё в i-й строке на j-м месте стоит вес ребра из i-й вершины в j-ю. Кроме того, когда ребро из i-й вершины в j-ю отсутствует, то в матрице весов на

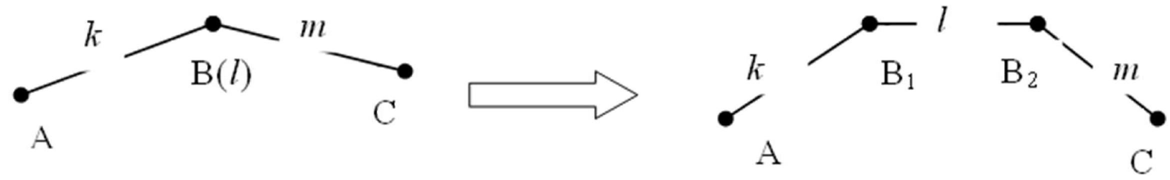


Рисунок 11.7

соответствующем месте, как правило, ставится не 0, а либо прочерк, либо знак бесконечности или минус-бесконечности, в зависимости от ситуации. Например, если у рёбер графа G_2 (рисунок 11.3) следующие веса: $u_1 = 3$, $u_2 = 4$, $u_3 = 2$, $u_4 = 7$, $u_5 = 0$, то его матрицу весов можно представить по крайней мере в двух видах:

$$W(G_2) = \begin{bmatrix} - & 4 & - & 7 & - \\ 4 & - & 3 & 0 & - \\ - & 3 & - & - & 2 \\ 7 & 0 & - & - & - \\ - & - & 2 & - & - \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \infty & 4 & \infty & 7 & \infty \\ 4 & \infty & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ 7 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \end{bmatrix}.$$

11.3.4 В некоторых случаях для задания графа удобна *матрица инцидентности*. Эта матрица – прямоугольная, в ней столько строк, сколько вершин в графе, а количество столбцов совпадает с числом рёбер. При её заполнении нумеруются не только вершины, но и рёбра графа, и в k-м столбце в i-й и j-й строках ставятся единицы, если ребро с номером k соединяет i-ю и j-ю вершины. На остальных местах ставятся нули. При наличии в графе петель (рёбер, у которых начальная и конечная вершины совпадают), в соответствующем столбике будет только одна единица. Иногда по договорённости её заменяют двойкой, что бывает удобнее. Матрица $L(G)$ является матрицей инцидентности графа G, изображённого на рисунке 11.8.

$$L(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11.3.5 Иногда при описании графов применяют *списки смежности вершин*.

Например, для графа G с рисунка 11.8 эти списки можно представить в следующем *полном* виде:

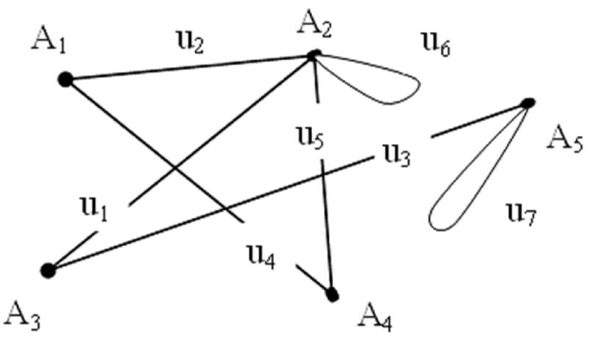


Рисунок 11.8

$$A_1:\begin{cases}A_2\\A_4\end{cases};\quad A_2:\begin{cases}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{cases};\quad A_3:\begin{cases}A_2\\A_5\end{cases};$$

$$A_4:\begin{cases}A_1\\A_2\end{cases};\quad A_5:\begin{cases}A_3\\A_5\end{cases}.$$

Но поскольку граф G – неориентированный, то можно ограничиться *неполным* списком смежности:

$$A_1:\begin{cases}A_2\\A_4\end{cases};\quad A_2:\begin{cases}A_2\\A_3\\A_4\end{cases};\quad A_3:\{A_5;\quad A_4;\quad A_5:\{A_5.$$

Кроме того, бывает удобен и *список инцидентности рёбер* (*рёберный список*). Для графа G с рисунка 11.8 этот список имеет следующий вид:

Таблица 11.1 – Рёберный список графа G

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
A_2	A_1	A_3	A_1	A_3	A_2	A_5
A_3	A_2	A_6	A_4	A_5	A_2	A_5